PROBLEMA 3: ESFERA CON POLARIZACIÓN PERMANENTE

Se tiene una esfera de radio R de un material permanentemente polarizado, cuya densidad de polarización es $\overline{P} = P_0 \overline{1z}$. Determinar el potencial electrostático y el campo eléctrico producido por esta polarización.

Solución

En primer lugar, se determinan las densidades equivalentes de carga de polarización:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \overline{P} = 0$$

$$\eta_P = -\overline{1r} \cdot \left[\overline{P}\Big|_{R^+} - \overline{P}\Big|_{R^-} \right] = \overline{1r} \cdot \overline{1z} P_0 = P_0 \cos\theta \text{ en } r = R$$

Como no hay cargas volumétricas, el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace.

A continuación se determina de cuáles coordenadas depende el potencial. Como la geometría del sistema depende del radio, y la densidad de cargas depende de θ, el potencial depende de estas dos coordenadas, siendo independiente de φ. Se definen dos regiones: región 1 la externa, y región 2 la interna. Las condiciones de frontera para el potencial son:

a) $\lim\limits_{r \to \infty} \phi_1(r,\theta) = 0$ b) $\lim\limits_{r \to 0} \phi_2(r,\theta) \neq \infty$

c) $\phi_1(R^+,\theta) = \phi_2(R^-,\theta)$ d) $-\varepsilon_0 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial r}\Big|_{R^+} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \phi_2}{\partial r}\Big|_{R^-} = \eta_P = P_0 \cos\theta$

Por la condición d, en los potenciales debe aparecer la función $\cos\theta$.

Entonces, la solución debe ser la general, con $n=1$ y $m=0$. A continuación se escriben los potenciales:

$$\phi_1(r,\theta) = \left(Ar + Br^{-2}\right)\cos\theta$$
$$\phi_2(r,\theta) = \left(Cr + Dr^{-2}\right)\cos\theta$$

Por la condición a, $A=0$; por la condición b, $D=0$; por la condición c, $BR^{-2} = CR$; y por la condición d, $2\varepsilon_0 BR^{-3} + \varepsilon_0 C = P_0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene para los potenciales:

$$\phi_1(r,\theta) = \frac{P_0 R}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos\theta$$
$$\phi_2(r,\theta) = \frac{P_0}{3\varepsilon_0} r\cos\theta = \frac{P_0}{3\varepsilon_0} z$$

Para el campo eléctrico se tiene, aplicando la ecuación $\overline{E} = -\nabla\phi$:

$$\overline{E_1}(r,\theta) = \frac{P_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[\overline{1r}\,2\cos\theta + \overline{1\theta}\,sen\theta\right]$$
$$\overline{E_2} = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\overline{1z}$$